به نام خدا

(تا زمان میان ترم روز یکشنبه ۱۴۰۱/۲/۱۱ ساعت 13)
(تا انتهای مطالب همین جلسه)

متغیرهای تصادفی Random Variables (RV)

همان طور که گفتیم متغیر تصادفی تابعی است که به هر نقطه از فضای نمونه یک عدد حقیقی نسبت می دهد و فضای احتمال را به فضای اعداد حقیقی تصویر می کند.

برای کار کردن با متغیرهای تصادفی و تجزیه و تحلیل و استخراج خصوصیات آنها نیاز به ابزارهایی داریم که در ادامه به معرفی آنها می پردازیم.

برای این منظور، ابتدا متغیرهای تصادفی را به دو دسته کلی متغیرهای تصادفی گسسته و متغیرهای تصادفی پیوسته دسته‌بندی می‌کنیم.

۱- متغیرهای تصادفی گسسته

متغیر تصادفی گسسته، متغیری است که مقادیری از یک مجموعه گسسته (شمارش‌پذیر) را اختیار می‌کند.

به عنوان مثال متغیر تصادفی X که نشان دهنده تعداد رخداد شیر (H) در n بار تکرار آزمایش تصادفی است. (پرتاب سکه)

$$X = x \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

$$P_r\{X = x\} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

که در آن p احتمال رخداد پیشامد مورد نظر (آمدن شیر یا H) است.

۲- متغیر تصادفی پیوسته

اگر متغیر تصادفی X، مقادیری از یک محدوده پیوسته (شمارش ناپذیر) اختیار کند، به آن متغیر تصادفی پیوسته می‌گوییم.

خواهیم دید که برای متغیرهای تصادفی پیوسته، احتمال نقاط برابر صفر است

$$Pr\{X = x\} = 0$$

برای این متغیرهای تصادفی می‌توانیم احتمال پیشامدهای به فرم

$$Pr\{X \in A\}$$

$$A \subseteq \mathbb{R}$$

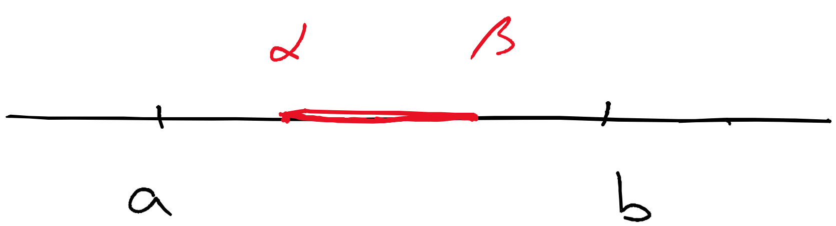
با کمک توابع احتمال (که معرفی خواهند شد) محاسبه کنیم.

به عنوان مثال اگر متغیر تصادفی X نشان دهنده ولتاژ دو سر یک مقاومت از یک مدار الکتریکی باشد که مقداری از بازه $[a, b]$ را اختیار کند، داریم

$$P_r\{X = x\} = 0$$

$$P_r\{X \in (\alpha, \beta)\} =$$ با کمک توابع احتمال قابل محاسبه است.

$$(\alpha, \beta) \subset [a, b]$$



همان طور که گفتیم به دنبال ابزارهای برای کار کردن با متغیرهای تصادفی هستیم. به طور خاص با توجه به اینکه مفهوم پیش آمدها را داریم، به دنبال ابزارهایی هستیم که با کمک آنها بتوانیم احتمال هر پیش آمدی در ارتباط با یک متغیر تصادفی را به دست بیاوریم.

برای این منظور از متغیرهای تصادفی گسسته شروع می کنیم. فرض می کنیم متغیر تصادفی X، یک متغیر تصادفی گسسته است که مقداری از بین مجموعه

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

را اختیار می کند.

تابع $P_X(x) = P_r\{X = x\} \equiv P_r\{X(\zeta) = x\}$

را تابع جرم احتمال برای متغیر تصادفی گسسته X می‌نامیم:

Probability mass function (pmf)

$$P_X(x_i) = P_r\{X = x_i\}, \quad x_i \in \mathcal{X}$$

با توجه به آنچه از پیشامدهای ساده در بخش قبل می‌دانیم، می‌توان نوشت

$$\sum_{x_i} p_X(x_i) = 1$$

$x_i \in \mathcal{X}$

$$\sum_{i=1}^{n} p_X(x_i) = 1$$

$$\sum_{x} p_X(x) = 1$$

با کمک تابع pmf می‌توانیم احتمال هر پیشامد A در ارتباط با X را بدست بیاوریم:

$$P_r\{X \in A\} = \sum_{A} P_X(x)$$

مثال: فرض کنید متغیر تصادفی X نشان دهنده تعداد رخداد شیر (H) در n بار پرتاب مستقل یک سکه است. احتمال شیر آمدن در یک بار پرتاب سکه را p در نظر بگیریم.

$$P_r\{X = x\} = \binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{n-x}$$

$$x \in \{0, 1, 2, \dots, n\} = X$$

(این متغیر تصادفی، متغیر تصادفی دوجمله‌ای می‌گوییم که در حالت کلی نشان دهنده تعداد رخداد پیش‌آمد مورد نظر در n بار تکرار آزمایش تصادفی است. در آن p احتمال رخداد پیشامد مورد نظر در یکبار انجام آزمایش تصادفی است)

در ارتباط با این متغیر تصادفی، احتمال پیشامدهای زیر را حساب کنید

۱_ احتمال اینکه پیشامد مورد نظر به دفعات زوج رخ دهد A

۲_ احتمال اینکه تعداد رخداد پیشامد مورد نظر عددی بین 3 تا 5 باشد B

$$P(A) = P_r \{ X \in \{0, 2, \ldots, 2k\} \mid 2k \leqslant n \} = \sum_{\substack{i=0 \\ i=2k}}^{n} P_X(i)$$

$$= \sum_{\substack{i=0 \\ i=2k}}^{n} P_r \{ X = i \}$$

$$P(B) = P_r\{X \in B\} = P_r\{X \in \{3,4,5\}\}$$

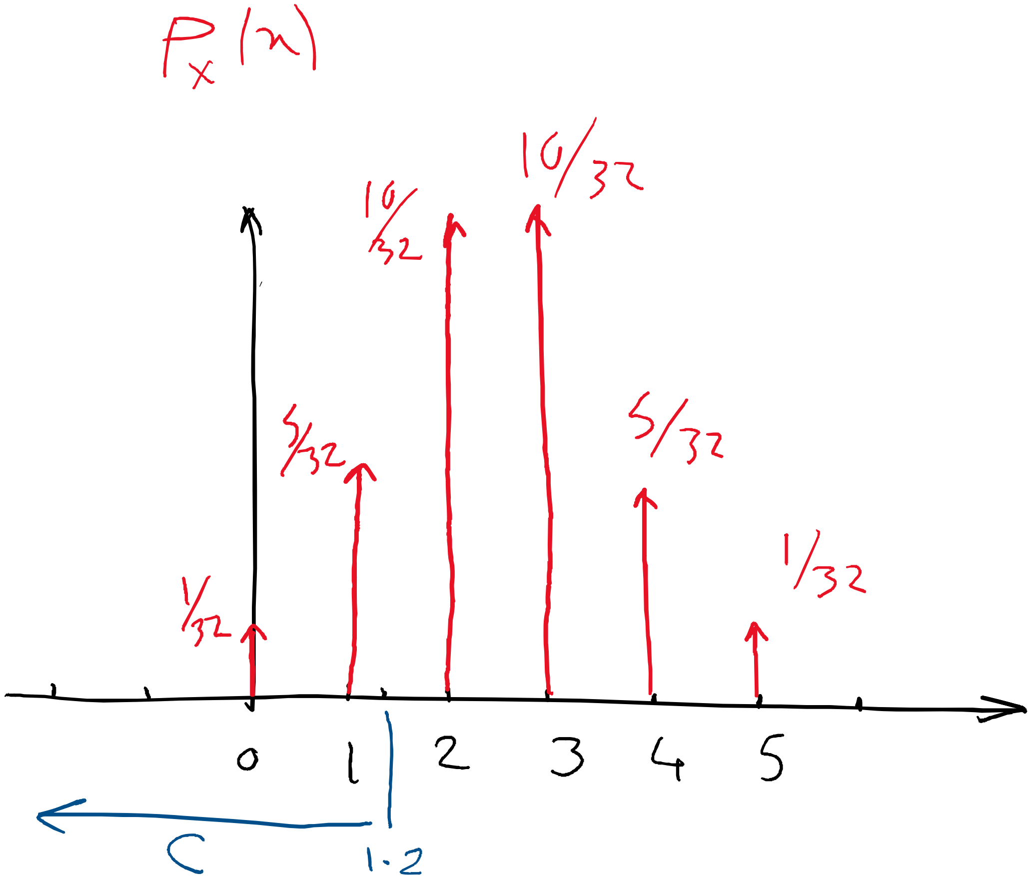
$$= \sum_{B} P_X(x) = \sum_{x=3}^{5} P_X(x)$$

به عنوان یک مثال عددی برای $n = 5$ و $p = \frac{1}{2}$ تابع جرم احتمال متغیر تصادفی مثال قبل را به دست بیاورید و $P(A)$ ، $P(B)$ را محاسبه کنید.

$$P_X(x) = P_r\{X = x\} = \binom{5}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{5-x}$$

$$x \in \{0, 1, 2, \dots, 5\} = \mathcal{X}$$

$$\Longrightarrow \quad P_X(x) = \begin{cases} \binom{5}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{5} & x \in \mathcal{X} \\ 0 & \text{oth.} \end{cases}$$



$$P(A) = P_r\{X = 2k \mid 2k \le 5\} = P_r\{X \in \{0, 2, 4\}\} = \sum_{\substack{i=0 \\ i=2k}}^{5} P_X(i)$$

$$= P_X(0) + P_X(2) + P_X(4) = \frac{1}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = P_r\{X \in \overbrace{\{3,4,5\}}^{B}\} = \sum_{B} P_X(x) = \sum_{x=3}^{5} P_X(x)$$

$$= P_X(3) + P_X(4) + P_X(5) = \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = P_r\{X < 1.2\} = \sum_{C} P_X(x) = \sum_{x=0}^{1} P_X(x)$$

$$= P_X(0) + P_X(1) = \frac{1}{32} + \frac{5}{32} = \frac{3}{16}$$

$$= P_r\{X=0 \ \underset{-}{\cup} \ X=1\} = P_r(X=0) + P_r(X=1)$$

تابع pmf را برای یک متغیر تصادفی گسسته می توانیم با کمک تابع دلتا نیز بیان کنیم

$$P_X(x) = \begin{cases} P_r\{X = x\} & x \in \mathcal{X} \\ 0 & \text{oth.} \end{cases}$$

$$P_X(x) = \sum_{i \in \mathcal{X}} P_X(i)\, \delta(x - i)$$

همان طور که دیدیم، تابع pmf برای متغیرهای تصادفی گسسته (که تنها نقاط دارای احتمال هستند) قابل استفاده است. در عمل ما به تابعی نیاز داریم که هم برای متغیرهای تصادفی پیوسته و هم برای متغیرهای تصادفی گسسته، قابل استفاده باشد.

احتمال نقاط برابر صفر است (نقاط احتمال ندارند)

به همین منظور تابعی تعریف می‌کنیم که به آن تابع توزیع احتمال یا تابع توزیع تجمعی گفته می‌شود

Probability Distribution Function (PDF)

تابع توزیع احتمال

Cumulative Distribution Function (CDF)

تابع توزیع تجمعی (برای متغیرهای تصادفی گسسته معنادارتر است)

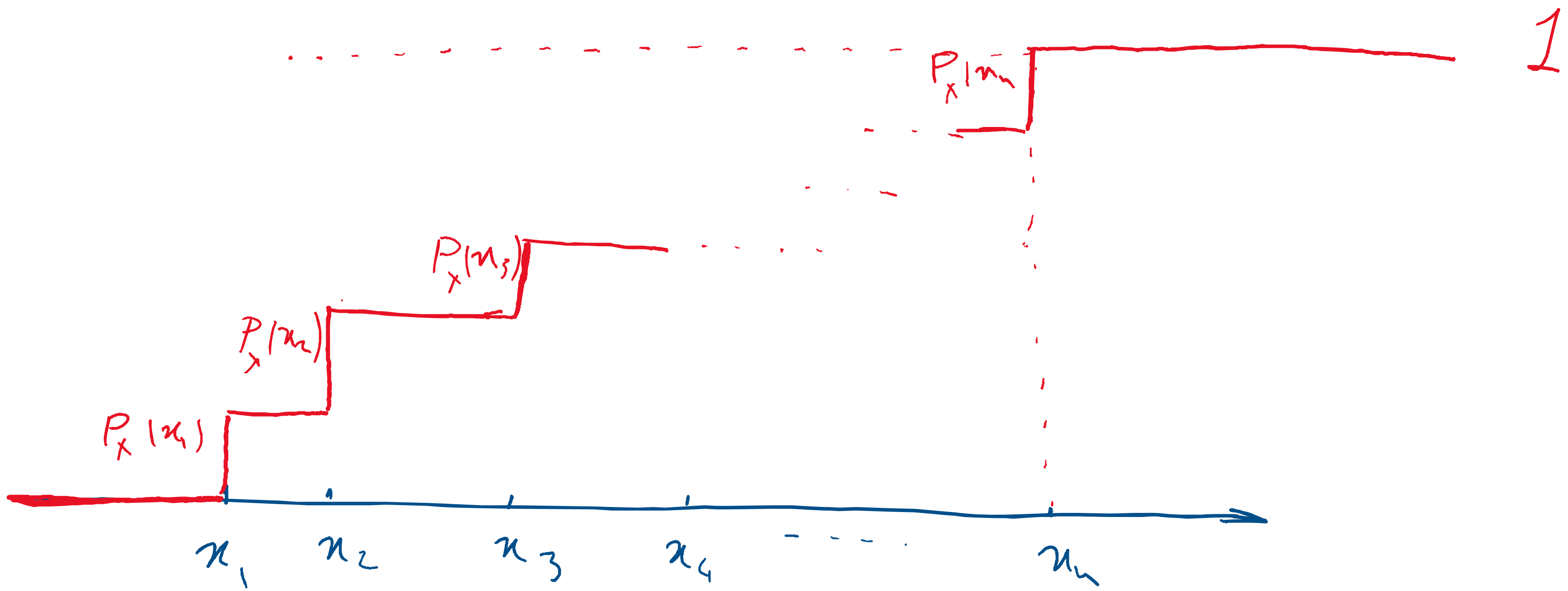
$$F_X(x) = P_r\{X \leq x\} = P_r\{X(\xi) \leq x\} = P_r\{\xi \mid X(\xi) \leq x\}$$

تابع توزیع احتمال

تابع توزیع احتمال برای متغیرهای تصادفی گسسته، فرم یکتایی به خود می‌گیرد، زیرا در متغیرهای تصادفی گسسته، نقاط دارای احتمال هستند و متغیر تصادفی مقادیری از یک مجموعه گسسته را اختیار می‌کند.

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$P_X(x) = \begin{cases} P_r\{X = x\} & x \in X \\ 0 & \text{oth.} \end{cases}$$



$$\underbrace{P_r\{X \le x\}}_{F_X(x)} = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ P_X(x_1) & x_1 \le x < x_2 \\ P_X(x_1) + P_X(x_2) & x_2 \le x < x_3 \\ \sum_{i=1}^{k} P_X(x_k) & x_k \le x < x_{k+1} \\ 1 & x > x_n \end{cases}$$

در این حالت می‌توان تابع $F_X(x)$ را با کمک تابع پله واحد نمایش داد

$$F_X(x) = P_r\{X \leq x\} = \sum_{\substack{i \\ i \in X}} P_X(i)\, u(x-i)$$

$$F_X(x) = \sum_{x_i} P_X(x_i)\, u(x-x_i)$$

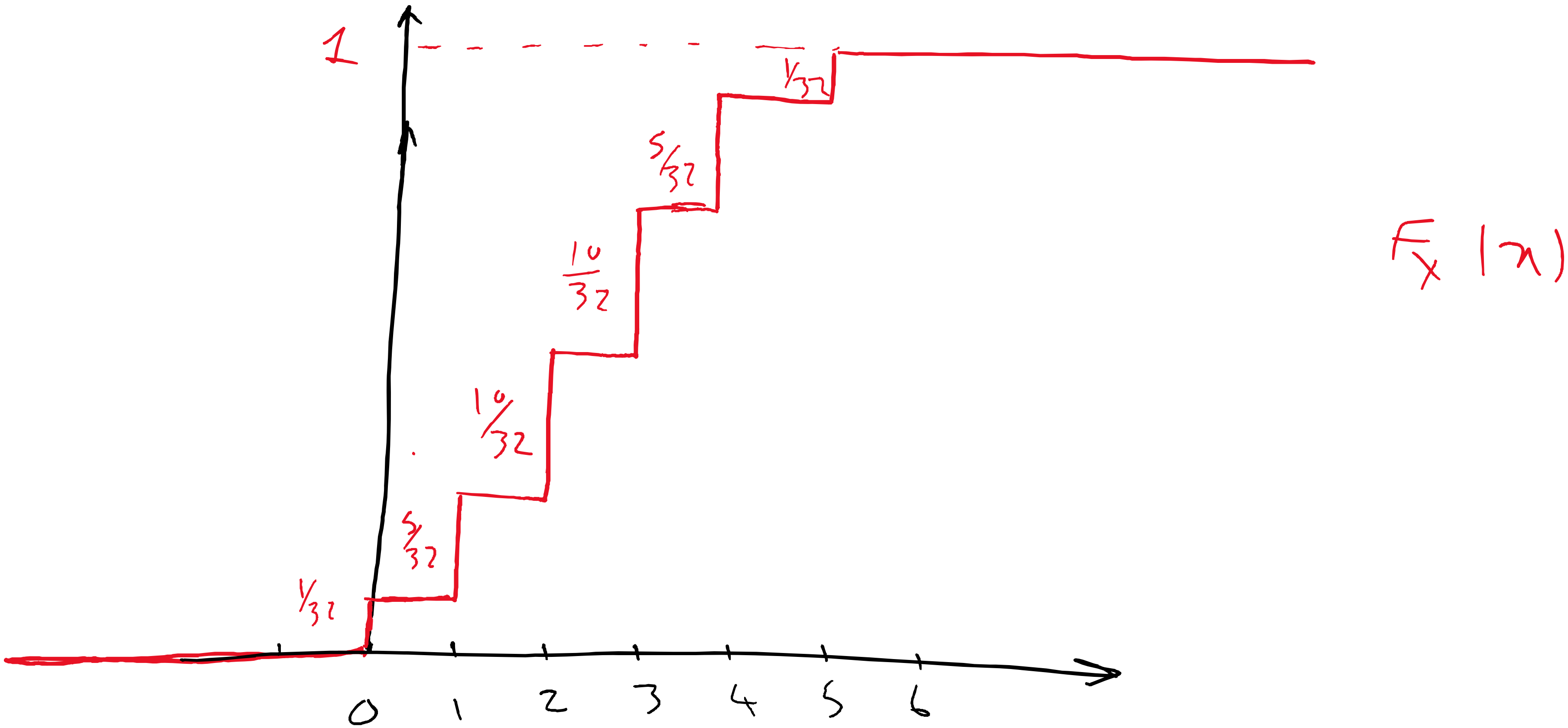
تابع پله واحد

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & \text{oth.} \end{cases}$$

به عنوان مثال عددی : برای متغیر تصادفی مثال قبل (X نشان دهنده تعداد رخداد شیر در 5 بار تکرار آزمایش تصادفی پرتاب سکه با $p=\frac{1}{2}$) تابع توزیع احتمال را به دست بیاورید و رسم کنید.

$$P_X(x) = \begin{cases} \binom{5}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^5 & x \in X = \{0,1,\dots,5\} \\ 0 & oth. \end{cases}$$

$$F_X(x) = P_r\{X \leq x\} = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{32} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{32}+\frac{5}{32} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{10}{32} & 2 \leq x < 3 \\ \vdots & 3 \leq x < 4 \\ & 4 \leq x < 5 \end{cases}$$



1
1/32
5/32
10/32
10/32
5/32
1/32
0
1
2
3
4
5
6
$F_X(x)$

برای متغیر تصادفی پیوسته X ، تابع توزیع احتمال $F_X(x)$ ، تابعی پیوسته از x است. برای مشخص شدن این موضوع از یک مثال کمک می‌گیریم.

مثال: فرض می‌کنیم یک مکالمه تلفنی به طور تصادفی در بازه زمانی $[0, T]$ رخ می‌دهد

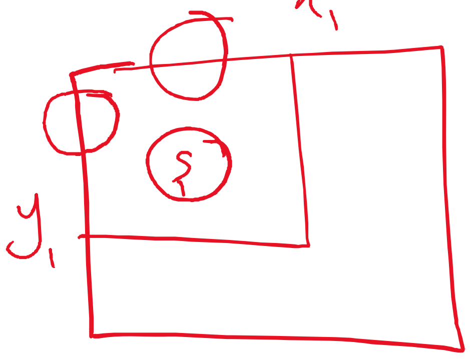
برای آن داریم

$$P_r\{t_1 \leq t \leq t_2\} = \frac{t_2 - t_1}{T}$$

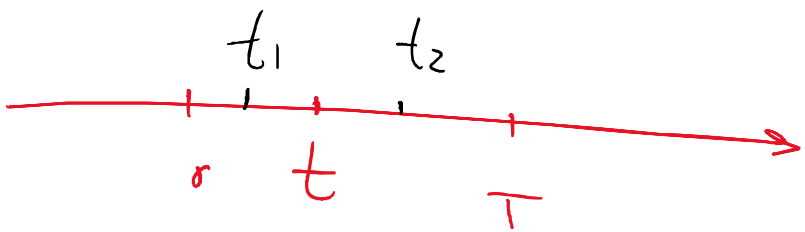
که زمان رخداد مکالمه

متغیر تصادفی X را در نظر می‌گیریم به طوری که نشان دهنده زمان رخداد مکالمه تلفنی باشد.

تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی X را به دست بیاورید



S_1/S

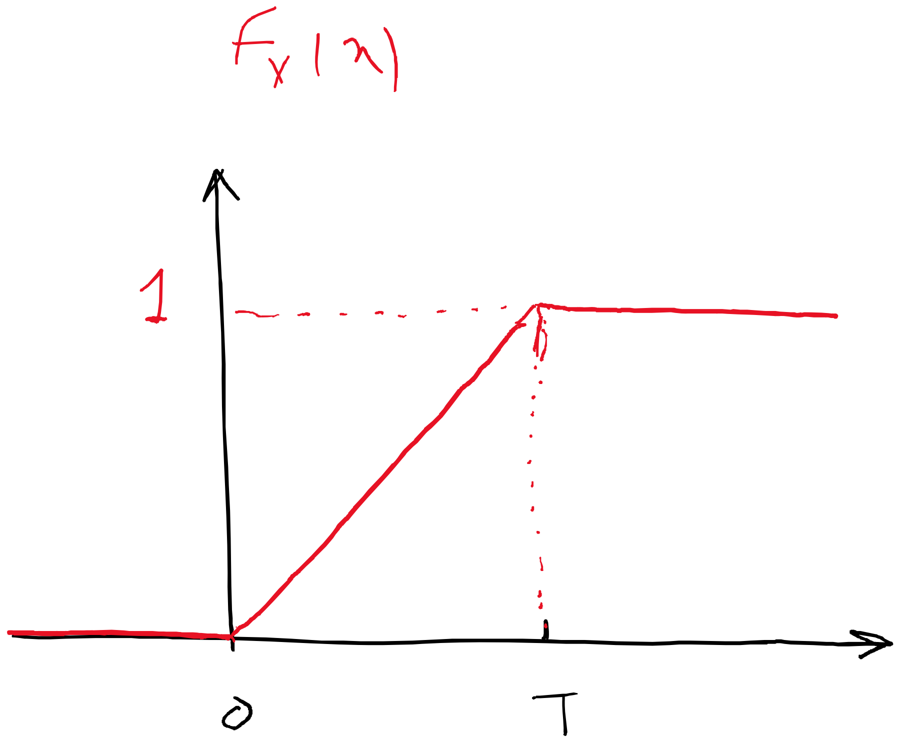


t/T

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x-0}{T} = \dfrac{x}{T} & 0 \leq x \leq T \\ 1 & x > T \end{cases}$$

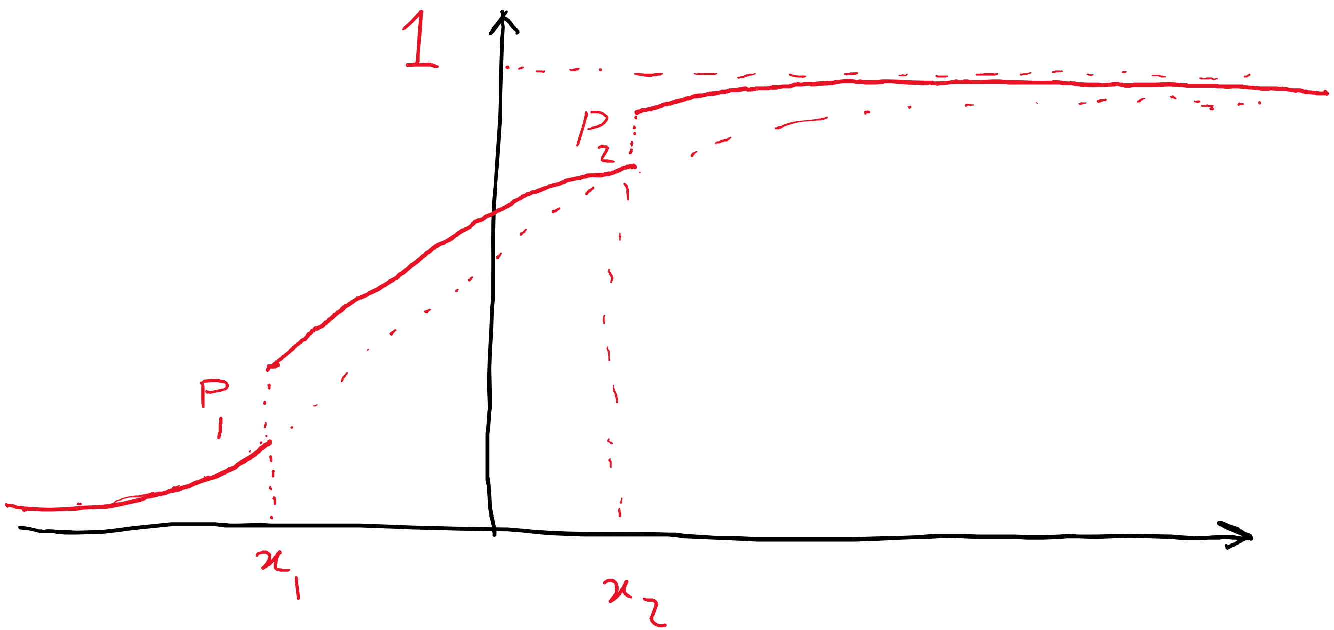
$$F_X(x) = P_r\{X \leq x\} = P_r\{0 \leq X \leq x\}$$

$$= \frac{x-0}{T}$$



(تابع پیوسته از x)

* در عمل متغیرهای تصادفی ترکیبی نیز داریم. در این متغیرهای تصادفی، تابع توزیع احتمال به صورت تکه‌ای پیوسته هستند. یعنی تابع توزیع احتمال در نقاطی دارای جهش است.



$$P_r\{X=x_1\}=P_1$$

$$P_r\{X=x_2\}=P_2$$

$$P_r\{X=x\}\underset{x\neq x_1,\,x_2}{=}0$$

در ادامه می خواهیم خصوصیات تابع توزیع احتمال را بررسی کنیم. این خصوصیات به ما کمک می کنند تا بتوانیم از $F_X(x)$ به عنوان ابزاری برای تحلیل متغیر تصادفی X استفاده کنیم.

1) $\forall x \,;\quad 0 \leq F_X(x) \leq 1$

$$F_X(x) = P_r\{X \leq x\} \xRightarrow[\text{تابع احتمال}]{0 \leq P \leq 1} 0 \leq F_X(x) \leq 1$$

2) $F_X(-\infty) = 0$

$$F_X(x) = P_r\{X \leq x\} \implies F_X(x)\Big|_{x=-\infty} = 0$$

3) $F_X(+\infty) = 1$

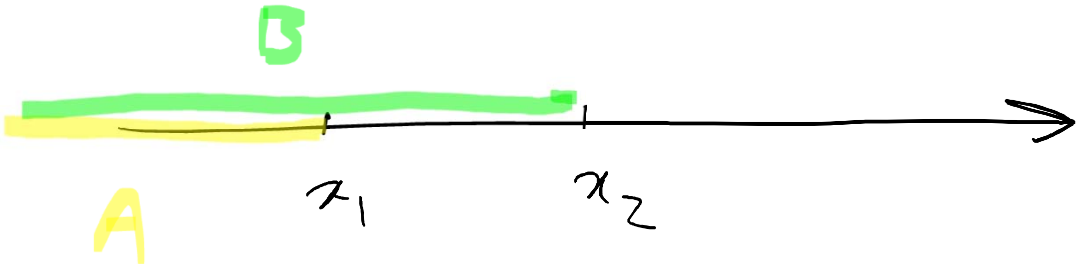
$$F_X(x) = P_r\{X \leq x\} \implies F_X(x)\Big|_{x=+\infty} = 1$$

4) $\forall\, x_1 \leq x_2 \implies F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

تابع توزیع احتمال غیرنزولی است

$$F_X(x) = P_r\{X \leq x\}$$

$$F_X(x_1) = P_r\{X \leq x_1\} = P_r\{X \in A\} = P(A)$$



$$A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$F_X(x_2) = P\{X \leq x_2\} = P_r\{X \in B\} = P(B)$$

بنابراین

$$\forall x_1 < x_2 \implies F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$$

تابع توزیع احتمال $F_X(x)$ یک تابع غیرنزولی برحسب x است.

5) $$P_r\{X > x\} = 1 - F_X(x)$$

$$F_X(x) = P_r\{\underbrace{X \leq x}_{A}\} \quad , \quad \{X > x\} = \{X \leq x\}^c$$

$$\implies \{X > x\} = A^c \quad , \quad P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$\Longrightarrow \quad P_r\{X > x\} = 1 - \underbrace{P_r\{X \leq x\}}_{F_X(x)}$$

$$\Longrightarrow \quad P_r\{X > x\} = 1 - F_X(x)$$

* احتمال پیش آمدهای به فرم $\{X > \alpha\}$ را می توان با کمک تابع توزیع احتمال به دست آورد

$$P_r\{X > \alpha\} = 1 - P_r\{X \leq \alpha\} = 1 - F_X(\alpha)$$